

Esercizi - Limiti e sviluppi di Taylor

Esercizio 1. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{2x - 3x^2 + 1}$ | e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ | i) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^x}{2x^3 + 7x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\arctan^2 x}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ | g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(e^{x-2} - 1)}{\log(x - 2)}$ | k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2}{x + 1}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) e^{-x}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x(x - 2)^2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ |

Esercizio 2. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin(2x) \cos x - 2x^3}{\log(1 + x^2) - x^2}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{\sin x - x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + e^{-x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^4} - 1}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^{-3x^2} - \cos(2x)}{x^2(\sqrt{1 + 2x} - e^x)}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2 - 4x^2}{x^2 \sin x}$ | m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sin\left(\frac{2}{x}\right) - 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos(2x) + e^{x^2} - 2}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2\sqrt{x}) - 3 \log(1 - x) - \sqrt[3]{1 + 3x}}{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x \log(1 + 3x)}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - x^2) - x^2 - 1}{\log(1 + x) - x}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x-x^2} \cos x - \sqrt{1 + 4x}}{x^2}$ |

Esercizio 3. Scrivere il polinomio di Taylor $T_{n,x_0}(x)$ nei seguenti casi:

- a) $f(x) = x e^{-2x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$;
- b) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$;
- c) $f(x) = 2x \log(1 + 3x)$, $x_0 = 0$, $n = 3$;
- d) $f(x) = \cos(x^3 - x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$;

Risultati

Esercizio 1. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

a) $-\frac{2}{3}$

e) $-\frac{1}{2}$

i) $\frac{1}{e}$

b) $+\infty$

f) $-\frac{1}{2\pi}$

j) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

g) 1

k) 2

d) 0

h) 3

l) e

Esercizio 2.

a) 2

f) $\frac{1}{12}$

k) 0

b) -1

g) $\frac{1}{3}$

l) $-\frac{23}{6}$

c) $\frac{1}{3}$

h) 8

m) $-\frac{2}{3}$

d) -1

i) 1

n) $-\frac{19}{3}$

e) $-\frac{1}{12}$

j) 3

o) $\frac{5}{2}$

Esercizio 3.

a) $x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{4x^4}{3};$

b) $1 - (x - \pi)^2$ oppure $1 - \pi^2 + 2\pi x - x^2$

c) $6x^2 - 9x^3$

d) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{25x^4}{24};$